

В. В. ЗОЗУЛЯ, д-р физ.-мат. наук, А. В. МЕНЬШИКОВ

КОНТАКТ БЕРЕГОВ ПЛОСКОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЫ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ РАСТЯЖЕНИЯ–СЖАТИЯ

При решении динамических задач механики разрушения для тел с трещинами необходимо учитывать, что при деформировании тела противоположные берега трещин могут взаимодействовать между собой с образованием изменяющихся во времени областей плотного контакта, что влечет за собой изменение напряженно-деформированного состояния в окрестности края трещины. К сожалению, в большинстве известных авторам работ контактным взаимодействием берегов трещины пренебрегают. Корректная математическая постановка динамической задачи механики разрушения для ограниченного тела с трещинами при учете контактного взаимодействия берегов была дана в [1, 2], где получены граничные интегральные уравнения задачи, а также эквивалентные исходной задаче граничные вариационные неравенства, разработаны алгоритмы численного решения, сводящиеся к нахождению седловой точки граничного функционала. Даны решения задач о взаимодействии гармонической волны с одной и двумя коллинеарными трещинами конечной длины в плоскости при учете контактного взаимодействия берегов. Пространственная осесимметричная динамическая контактная задача для круговой трещины в материале решена в [3]. Настоящая работа посвящена решению несимметричной задачи для эллиптической трещины при нормальном падении волны растяжения-сжатия с учетом контактного взаимодействия берегов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородное изотропное линейно упругое трехмерное евклидово пространство, содержащее плоскую эллиптическую трещину с поверхностью $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq a \cos \beta, 0 \leq x_2 \leq b \sin \beta, x_3 = 0, 0 \leq \beta < 2\pi, a \geq b\}$ под воздействием гармонической волны растяжения-сжатия, распространяющейся с частотой ω перпендикулярно к поверхности трещины. Напряженно-деформированное состояние тела описывается уравнениями линейной теории упругости, нагрузка на берегах трещины, являющаяся результатом действия падающей волны, учитывая ориентацию системы координат, определяется следующим образом:

$$\mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) = \left(0, 0, \operatorname{Re} \left\{ -k_1^2 \Phi_0 e^{i(k_1 x_3 - \omega t)} \right\} \right),$$

где Φ_0 – амплитуда падающей волны; $k_1 = \omega/c_1$ – обобщенное волновое число; $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость распространения продольной волны; λ и μ – константы Ламэ; ρ – плотность материала.

2. Метод решения. На поверхности противоположных берегов трещины, контактирующих в процессе деформации, возникают силы контактного взаимодействия $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, а взаимные перемещения берегов характеризуются вектором разрыва перемещений $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Вследствие контакта нагрузка на берегах трещины имеет вид

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}^*(\mathbf{x}, t) + \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$$

Касательные компоненты упомянутых векторов равны нулю, поэтому будем определять нормальные компоненты, для которых должны выполняться ограничения

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad q_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad \Delta u_3(\mathbf{x}, t) q_3(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1)$$

Нормальные компоненты векторов нагрузки и разрыва перемещений представим тригонометрическими рядами Фурье

$$p_3(\mathbf{x}, t) = \frac{p_{3,\cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} p_{3,\cos}^m(\mathbf{x}) \cos(\omega_m t) + p_{3,\sin}^m(\mathbf{x}) \sin(\omega_m t);$$

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta u_{3,\cos}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \Delta u_{3,\cos}^m(\mathbf{x}) \cos(\omega_m t) + \Delta u_{3,\sin}^m(\mathbf{x}) \sin(\omega_m t);$$

с коэффициентами

$$p_{3,\cos}^m(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_3(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_m t) dt,$$

$$p_{3,\sin}^m(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_3(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_m t) dt;$$

$$\Delta u_{3,\cos}^m(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_3(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_m t) dt,$$

$$\Delta u_{3,\sin}^m(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_3(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_m t) dt.$$

Согласно [1, 3] коэффициенты Фурье векторов нагрузки и разрыва перемещений связаны для каждого номера m системой комплексных уравнений

$$(p_{3,\cos}^m(\mathbf{x}), -p_{3,\sin}^m(\mathbf{x})) = - \int_{\Omega} (F_{33}^{\text{Re}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_m), F_{33}^{\text{Im}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_m)) \times$$

$$(\Delta u_{3,\cos}^m(\mathbf{y}), -\Delta u_{3,\sin}^m(\mathbf{y})) d\Omega \quad (m = 0, 1, \dots), \quad (2)$$

где $F_{33}^{\text{Re}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_m)$ и $F_{33}^{\text{Im}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_m)$ – действительная и мнимая части комплекснозначной функции [3]

$$F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_m) = \frac{1}{r^3} \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2\pi(\lambda + 2\mu)} - \frac{1}{r^3 4\pi\mu} \left\{ 4\mu^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i\omega_m r}{c_2} \right)^n \frac{(n-1)^2}{n!(n+2)} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda^2 n(n+2) + 4\lambda\mu(n+2) + 12\mu^2 \right] \left(-\frac{i\omega_m r}{c_1} \right)^n \frac{c_2^2}{c_1^2} \frac{(n-1)}{n!(n+2)} \right\};$$

r – расстояние от точки нагружения до точки наблюдения. При этом в связи с наличием в интегральных ядрах $F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_m)$ особенностей, порядок которых превышает размерность области интегрирования, интегралы, входящие в системы граничных интегральных уравнений (2), являются расходящимися и их необходимо рассматривать в смысле конечной части по Адамару.

Аппроксимировав поверхность трещины множеством плоских многоугольных элементов Ω_j ($j = \overline{1, N}$), после разделения действительных и мнимых частей получим систему линейных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами

$$\mathbf{F}_n^m \mathbf{U}_n^m = \mathbf{P}_n^m, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{F}_n^m = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{33}^{m,\text{Re}} & -\mathbf{F}_{33}^{m,\text{Im}} \\ \mathbf{F}_{33}^{m,\text{Im}} & -\mathbf{F}_{33}^{m,\text{Re}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_n^m = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{3,\cos}^m \\ \mathbf{U}_{3,\sin}^m \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P}_n^m = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{3,\cos}^m \\ \mathbf{P}_{3,\sin}^m \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_{33}^{m,\text{Re(Im)}} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega_1} \mathbf{F}_{33}^{\text{Re(Im)}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}, \omega_m) d\Omega & \cdots & \int_{\Omega_N} \mathbf{F}_{33}^{\text{Re(Im)}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}, \omega_m) d\Omega \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{\Omega_1} \mathbf{F}_{33}^{\text{Re(Im)}}(\mathbf{x}_N, \mathbf{y}, \omega_m) d\Omega & \cdots & \int_{\Omega_N} \mathbf{F}_{33}^{\text{Re(Im)}}(\mathbf{x}_N, \mathbf{y}, \omega_m) d\Omega \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{U}_{3,\cos(\sin)}^m = \begin{Bmatrix} \Delta u_{3,\cos(\sin)}^m(\mathbf{y}_1) \\ \cdots \\ \Delta u_{3,\cos(\sin)}^m(\mathbf{y}_N) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{3,\cos(\sin)}^m = \begin{Bmatrix} p_{3,\cos(\sin)}^m(\mathbf{x}_1) \\ \cdots \\ p_{3,\cos(\sin)}^m(\mathbf{x}_N) \end{Bmatrix}.$$

причем точки \mathbf{x}_l и \mathbf{y}_l расположены в геометрическом центре граничного элемента Ω_l .

Далее задача решалась с применением итерационного алгоритма [1, 3, 4]. Коэффициент интенсивности напряжений (КИН) нормального отрыва $K_I(\mathbf{x}, t)$ вычислялся по формуле [5]

$$K_I(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \Delta u_3(\mathbf{x}, t),$$

где r – расстояние от вершины трещины до заданной точки. При численном решении задачи для вычисления КИН использовалось значение нормальной компоненты вектора разрыва перемещений, вычисленное по первому граничному элементу от края трещины.

Об изменениях КИН нормального отрыва в зависимости от расположения точки в окрестности края трещины можно судить по рис. 1, на котором приведен график

$$K_I^0(\mathbf{x}) = \max_{t \in [0; T]} K_I(\mathbf{x}, t) / p \sqrt{\pi a}$$

для различных приведенных волновых чисел при учете контакта берегов.

Кривые 1, 2

соответствуют

значениям $k_2 a$,

равным 0,001 и 1,0.

Видно, что КИН

достигает своего

максимума в

вершинах малой оси

эллипса $\beta = \pi/2$, а

минимума – в

вершинах большой

оси $\beta = 0$. Кривая 1,

соответствующая

близкому к нулю

волновому числу,

согласуется с

результатами для

статической задачи

[6].

На рис. 2

приведены графики

изменения отношения

максимального

значения КИН

нормального отрыва к

соответствующему

статическому

значению в вершинах

большой (кривые 2, 4)

и малой (кривые 1, 3)

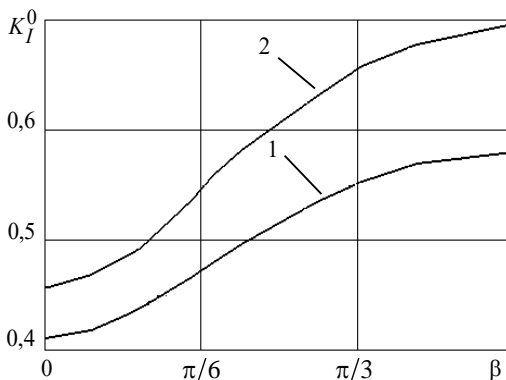


Рис. 1

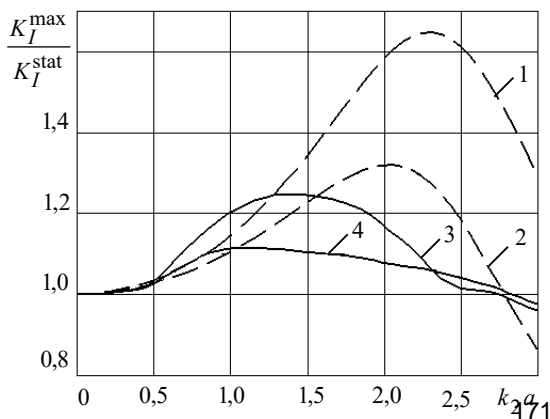


Рис. 2

осей эллипса с учетом (кривые 3, 4) и без учета (кривые 1, 2) контакта берегов трещины. В рассматриваемом случае статическое значение определяется по известной формуле [5]

$$K_I^{\text{stat}} = \frac{p\sqrt{\pi b}}{\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta} \left(\sin^2 \beta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \beta \right)^{\frac{1}{4}},$$

где $k^2 = 1 - b^2/a^2$.

Отметим, что результаты, полученные без учета контактного взаимодействия берегов, совпадают с известными [6]. Учет контактного взаимодействия трещины значительно влияет на значения КИН. Изменяется и величина максимумов, и волновое число, при котором они достигаются, что свидетельствует о необходимости учета контактного взаимодействия при решении задач механики разрушения

Резюме. Цю роботу присвячено актуальному питанню механіки руйнування – проблемі гармонічного навантаження пружного тіла з тріщиною. Розглянуто задачу про контактну взаємодію берегів плоскої стаціонарної еліптичної тріщини у тривимірному просторі під впливом хвилі розтягу-стиску, що поширюється перпендикулярно поверхні тріщини. Задачу розв'язано за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь з використанням ітераційного алгоритму, який ґрунтується на варіаційних принципах динамічної теорії пружності. В околі краю тріщини обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень. Проведено порівняння з результатами, які отримані для еліптичної тріщини без врахування контакту берегів.

Summary. The present paper is devoted to the topical problem of the fracture mechanics – the harmonic load of the elastic body with crack. The three-dimensional problem for a plane stationary elliptical crack under normally incident tension-compression wave has been considered. The problem has been solved by the boundary integral equations method using iteration algorithm based on variational principles of the dynamic theory of elasticity. The stress intensity factors (opening mode) have been calculated in the vicinity of the crack's apex. The comparison with results obtained for the elliptical crack without allowance for crack's edges contact interaction has been done.

Список литературы: 1. Гузь А. Н., Зозуля В. В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках. К., 1993. 236 с. (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т.; Т. 4, Кн. 2). 2. Guz A. N. Description and study of some nonclassical problems of fracture mechanics and related mechanisms // Intern. Appl. Mech. 2000. Vol. 36, № 12. P. 1537–1564. 3. Zozulya V. V., Men'shikov A. V. About one 3D contact problem of fracture mechanics in a case of normal action of a tension-compression wave // Int. Appl. Mech. 2002. Vol. 38, № 7. P. 74–78. 4. Zozulya V. V., Men'shikova M. V. Study of iterative algorithms for solution of dynamic contact problems for elastic cracked bodies // Int. Appl. Mech. 2002. Vol. 38, № 5. P. 573–577. 5. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М. 1974. 640 с. 6. Zhang Ch., Gross D. On Wave Propagation in Elastic Solids with Cracks, Comp. Mech. Publ., Southampton, UK, Boston, USA, 1998. 248 p.

Centro de Investigacion Cientifica de Yucatan, Merida, Mexico
Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 3.02.2003